## EXERCICE 30 :

$\theta(0) = 0$

$\theta'(t) + (0,1)\theta(t) = 2$

1) $\theta$ est une solution de l'équation différentielle : $y' = -(0,1).y + 2$ et $\theta(0) = 0$

D'où :

$$\theta(t) = -20\,e^{-0,1t} + 20$$

2) – a) $\theta(10) = (20 - \frac{20}{e})$ °C

$\theta(60) = (20 - \frac{20}{e^6})$ °C

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \theta(t) = 20$$

Pour t assez grand , la température du conducteur tend vers 20°C

## EXERCICE 31 :

### Partie A

$$f(x) = \frac{3e^{x/5}}{e^{x/5} + 2}$$

1)

$$f'(x) = \frac{\frac{6}{5}e^{x/5}}{(e^{x/5}+2)^2} > 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1 + e^{\frac{-x}{5}}} = 3 \quad (e^{\frac{-x}{5}} \to 0)$$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | 0 ↗ | 3 |

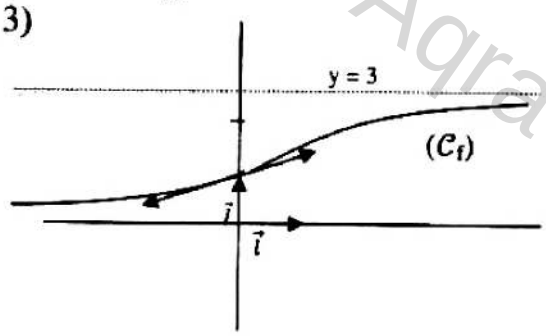
Les droites d'équations respectives :

$Y = 0$ et $y = 3$ sont des assymptôtes à $(\mathcal{C})$

2) $T : y = f'(0).(x - 0) + f(0)$

$$T : y = \frac{2}{15}x + 1$$

3)




4) – a) $F(x) = 15.\text{Ln}(2 + e^{\frac{x}{5}}) + k \quad ; k \in \mathbb{R}$

$F(0) = 0 \Rightarrow k = -15\text{Ln}3$

D'où : $F(x) = 15.\text{Ln}(2 + e^{\frac{x}{5}}) - 15\text{Ln}3$

$$F(x) = 15.\text{Ln}\left(\frac{2 + e^{x/5}}{3}\right)$$

b) $\mathcal{A} = \int_0^5 f(x)dx = [F(x)]_0^5$

$= F(5) - F(0)$

$$\boxed{\mathcal{A} = 15\ \text{Ln}\left(\frac{2+e}{3}\right)}\ \text{u.a}$$

### Partie B

1) (I) : $g' = \frac{1}{5}g$

a) les solutions de (I) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = k\,e^{x/5}$; $k \in \mathbb{R}$

b) $g(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

d'où : $g(t) = e^{t/5} \quad ; t \in [0,+\infty[$

2) (II) : $g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$

a) $h = \frac{g}{3-g}$ h solution de (I) $\Leftrightarrow h' = \frac{h}{5}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{g}{3-g}\right)' = \frac{g}{5(3-g)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g'(3-g)+g'g}{(3-g)^2} = \frac{g}{5(3-g)} \Leftrightarrow \frac{3g'}{3-g} = \frac{g}{5}$$

$$\Leftrightarrow 3g' = \frac{3}{5}g - \frac{g^2}{5} \Leftrightarrow g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$$

$\Leftrightarrow$ g est solution de (II)

b) $h(x) = ke^{\frac{x}{5}} \quad ; k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)}{3-g(x)} = ke^{\frac{x}{5}}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{3e^{\frac{x}{5}}}{1-ke^{\frac{x}{5}}} \quad ; k \in \mathbb{R}$$

c) $g(0) = 1 \Rightarrow \frac{3k}{1+k} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

d'où : $g(x) = \frac{3e^{\frac{x}{5}}}{2-e^{\frac{x}{5}}} = f(x)$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ la population tend vers 3 milliers.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn